

ROMA, RAMO, AMOR

Arta combinatoricii

JOSÉ A. CUESTA

Traducere de Rodica Olteanu

CUPRINS

Capitolul 0

Ca multe alte povești, și aceasta începe cu un triunghi	7
Pascal și triunghiul aritmetic	7
Binomul lui Newton	14
Arta conjecturii	19

Capitolul 1

Suspecții obișnuiți	23
Magia permutărilor	23
<i>Formula factorială pentru aranjamente</i>	31
Arta designerului de parfumuri: combinații	34
<i>Mulțimi și submulțimi</i>	38

Capitolul 2

Un triunghi magic	47
Numerele figurative	50
De la prozodia hindusă la reproducerea iepurilor	56
O chestiune de egalitate	63
<i>Take a walk on the wild side</i>	65
<i>Triunghiul armonic al lui Leibniz</i>	66
Miscellanea	70

Capitolul 3

Calea duodecuple

Urne și bile	75
Partiții de mulțimi	78
<i>Numărul mediu de cicluri pentru o permutare</i>	84
<i>Triunghiul lui Bell</i>	88
Partiții întregi	91
<i>Calcularea numărului de partiții ale unui număr întreg</i>	98
Principiul porumbarului	102
Ultimele lacune de completat	106

Capitolul 4

Principiul incluziunii-excluziunii

Principiul incluziunii-excluziunii	107
Calcularea numerelor prime	109
Totalizarea tuturor felurilor de cărți de joc	111
<i>O formulă alternativă pentru numerele Stirling de speța a II-a</i>	113
„Scandalagiu”	114
	116

Capitolul 5

Ce rămâne de spus despre permutări

Structura ciclică a permutărilor	119
Doborârea recordurilor	124
Problema celor 100 de prizonieri	131

Epilog

Și moștenirea grecilor?

Lecturi recomandate

135
143

Capitolul 0

Ca multe alte povești, și aceasta începe cu un triumghi

„Este ușor de perceput că varietatea prodigioasă atât de recurentă în lucrările proprii ale naturii ca și în acțiunile oamenilor, și care constituie o mare parte din frumusețea universului, se datorează multitudinii de forme diferite în care diferitele părți se amestecă și se înlanțuie unul lângă celălalt.”
(Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*)

Pascal și triunghiul aritmetic

Cultura occidentală, cu gândirea și ideile sale, datorează mult „saloadelor literare” organizate în conacele aristocrației franceze din secolele al XVII-lea și al XVIII-lea (mai ales femeilor, cunoscute sub numele de *salonnières*). Scopul întâlnirilor, care a reunit intelectualii timpului, a fost de a se bucura de o companie plăcută, de a rafina gusturile și de a-și dezvolta cunoștințele prin conversație și lectură. Conținutul discuțiilor a fost despre literatură și filosofie, înțeles în sens larg și, desigur, a inclus științele. Autorii *Enciclopediei* și alți iluminiști din secolul al XVIII-lea au fost oaspeți frecvenți ai saloadelor pariziene.

Primul personaj din istoria noastră este **Antoine Gombaud** (1607-1684), un scriitor francez născut la Poitou, invitat pentru a soluționa dilemele în conversațiile dintre intelectualii moderni și strălucitori. Deși nu făcea parte din aristocrație, el a fost cunoscut printre prieteni drept *Chevalier de Méré*, numele unuia dintre personajele din cărțile sale prin care și-a exprimat opiniile personale. Există două caracteristici interesante ale Cavalerului de Méré: era

pasionat de știința matematică și era un jucător înveterat. În primul domeniu nu a ajuns la rezultate semnificative, se limita să fie la curent cu cunoștințele matematice ale epocii sale. Adevărata utilitate a pasiunii sale s-a manifestat printr-o intuiție marcantă pe care a reușit să o folosească în al doilea domeniu: jocurile de noroc. El știa, mai mult decât oricine, fără calcule, că era mult mai probabil să obțină un 6 cu patru aruncări cu zaruri¹ și a exploatat aceste cunoștințe în avantajul său în pariuri.

Dar, deși noțiunile sale de matematică nu erau majore, participarea la saloanele pariziene i-a permis să fie în contact cu matematicieni de un anumit calibru, inclusiv protagonistul nostru: **Blaise Pascal** (1623–1662). Pascal a fost un om de știință eclectic capabil să aducă contribuții fundamentale în fizică și matematică, dincolo de a fi un filosof și un scriitor cu convingeri creștine solide.

Pascal s-a născut în Clermont (acum Clermont-Ferrand), dar și-a petrecut o mare parte din viață la Paris. A fost fiul unui bogat magistrat al trezoreriei, pasionat de matematică, care s-a ocupat personal de educația sa; la început a decis să omită complet matematica până când Blaise ar fi împlinit 15 ani. Realizând însă că fiul său lucrase pe ascuns, obținând mai multe rezultate de geometrie pe cont propriu, a fost atât de impresionat încât a decis să-i ofere acces liber la biblioteca sa, începând cu *Elementele* lui Euclid, și l-a luat cu el la întâlnirile Academiei de Mersenne (care câțiva ani mai târziu avea să devină Academia Franceză de Științe). De fapt, micul Pascal era un copil minune. La vârsta de 16 ani a publicat prima sa lucrare de matematică, un studiu al curbelor conice (elipse, parabolă și hiperbolă), iar la 19 ani, pentru a-și ajuta tatăl să colecteze taxe, s-a ocupat de proiectarea, brevetarea și comercializarea unui calculator automat (*pascalina*, pe piață până în deceniul 1950).

¹ De fapt, calculul nu este dificil: dacă probabilitatea de a nu obține un 6 din patru aruncări este $(5/6)^4$, probabilitatea opusă, adică ceea ce ne interesează, va fi $1 - (5/6)^4$, aproximativ 52%. Cu toate acestea, trebuie avut în vedere faptul că, la acel moment, conceptul de probabilitate nu a fost încă inventat, așa cum vom vedea în scurt timp.

Pe lângă contribuțiile bine-cunoscute în fizică prin cercetarea despre presiune, studiul despre fluide și vid, el a fost un filosof important, cu o gândire profund influențată de religie. Contribuțiile sale în domeniul științelor matematice au dat naștere unor noi ramuri, cum ar fi teoria probabilităților și combinatorica, și, dacă nu ar fi avut o sănătate precară care a dus la dispariția sa prematură, el ar fi putut fi inventatorul calculului infinitezimal.

Pascal s-a bucurat deja de o bună reputație ca matematician. El a participat la saloanele de la Paris, și o dată, întâlnindu-l pe cavalerul de Méré, i-a prezentat o problemă cu care lupta de un secol, dar pentru care nimeni nu găsise un răspuns satisfăcător; o chestiune de mare interes pentru un jucător: *problema punctelor*. Întrebarea este după cum urmează. Doi jucători, A și B, fac un pariu cu un anumit număr de runde la un joc de noroc: de exemplu, diferite aruncări cu o monedă: cap sau pajură. Cel care câștigă premiul pariului, este acela care câștigă cele mai multe runde. Cu toate acestea, este posibil ca, dintr-un motiv sau altul, jocul trebuie să se oprească înainte de sfârșit. Într-un asemenea caz, cum ar trebui să fie distribuit premiul pariului între jucători? Pentru a ne face o idee, să ne imaginăm că pariul constă din cel mult 7 aruncări, dar, după ce au fost 3 aruncări, două câștigate de A și una de B, jocul este suspendat. Care parte a premiului este pentru A și care este pentru B?

Călugărul **Luca Pacioli** (aprox. 1445–1517) a fost primul care a ridicat problema în *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, dar soluția propusă era greșită: în opinia sa, a trebuit să fie redistribuită 2:1, în funcție de punctele câștigate. Este ușor să îți dai seama că soluția era greșită: dacă A câștigă 4 puncte și B 2 puncte, nu este nevoie să continui jocul, de fapt chiar dacă B ar fi reușit să



Figura 1. Portret în ulei al lui Blaise Pascal în tinerețe.

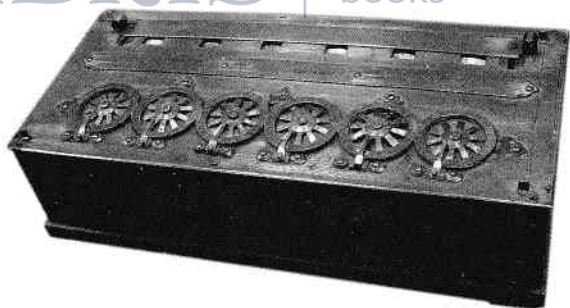


Figura 2. Mașina de calcul inventată de Pascal (*pascalina*).

În fotografia lui David Monniaux, un model din 1652.

câștigă runda care rămânea de jucat și ar fi terminat 4:3, A ar fi în continuare câștigătorul; cu toate acestea, în acest caz, regula lui Pacioli stabilește o distribuție a premiului de 4:2.

Mai târziu, problema punctelor a fost abordată de Tartaglia și Cardano (care au scris pe această temă o lucrare publicată postum, *Liber de ludo aleae*, „Cartea jocurilor de noroc”) fără ca cineva să poată face progrese suplimentare în comparație cu Pacioli. Când Pascal a aflat de această problemă, prezentată de Cavaliere de Méré, i-a trezit imediat interesul și și-a dat seama cât de dificilă era soluția sa. Apoi a decis să o împărtășească cu unul dintre cei mai renumiți matematicieni contemporani: **Pierre de Fermat** (1601–1665). Aceasta s-a întâmplat în anul 1654, iar decizia lui Pascal a dat naștere unui schimb de scrisori astăzi considerat documentul fondator al teoriei probabilităților. De fapt, soluția constă, nici mai mult, nici mai puțin, în determinarea șanselor fiecărui jucător de a câștiga provocarea, deci este necesar să se studieze eventualele rezultate ale aruncărilor care rămân de făcut.

Propunerea lui Pierre de Fermat este să analizeze toate combinațiile de rezultate pentru rundele rămase. Pascal a conceput o soluție alternativă, deoarece credea că precedenta este neclară, deși a ajuns să admită că ideea colegului său era cea mai logică. Următorul tabel prezintă rezultatele celor 4 lansări rămase pe verticală; în partea de jos, este indicat dacă câștigătorul este A sau B:

A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B	A	B	B	B	B
A	A	A	B	A	A	B	A	B	A	B	B	A	B	B	B
A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	B	B	A	B	B
A	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	B	B	B	A	B
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B

Rezultatul este clar: A ar câștiga de 11 ori și B de 5. Deoarece oricare dintre cele 16 posibilități sunt la fel de probabile, distribuția corectă a pariului este de 11:5.

O parte din discuția realizată în misivele dintre Pascal și Fermat se referea la faptul că anumite opțiuni enumerate nu ar fi jucate niciodată. De exemplu, prima, în care A câștigă de 4 ori. Motivul este că, atunci când A câștigă încă 2 puncte, rezultatul jocului este decis. Astăzi știm că atunci când suspendăm jocul nu se întâmplă nimic mai mult decât redistribuirea posibilităților în așa fel încât, în cele din urmă, să fie echivalent (și mai simplu) să se efectueze studiul așa cum a fost configurat de Fermat.

În zilele noastre, Fermat are o reputație nedreaptă de *matematician amator*. Iată motivul: el era un avocat competent, care câștiga bine pentru a trăi din munca sa, și pentru el matematica a fost un *hobby*. Dar, totuși, un *hobby* căruia i-a dedicat mult timp și multă energie. Ceea ce îl diferențiază de ceilalți matematicieni contemporani cu care se compară este faptul că nu ar fi fost deloc interesat să publice nimic din opera sa. Suntem la curent cu rezultatele sale mulțumită corespondenței cu colegii, unde a prezentat probleme și rezultatul obținut personal, dar fără a explica dezvoltarea sa. O asemenea atitudine, unele erori aici și acolo (cum ar fi afirmația că numerele de forma $2^{2^n} + 1$ sunt toate prime²), plus celebra „întrebare” din ultima teoremă a lui Fermat („Cunosc o demonstrație minunată a acestei teoreme care nu poate fi expusă în marginea prea îngustă a paginii”), sunt cauza faimei lui.

² Numerele de această formă sunt prime până la $n = 4$, dar Euler a descoperit că $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 670\,417$ și de atunci au fost compuse toate acelea care au fost încercate (până la $n = 32$). Încă nu știm dacă există alte numere prime de această formă.

Cu toate acestea, Fermat a fost unul dintre cei mai autoritari matematicieni, iar contribuțiile sale sunt multe și de cea mai mare importanță (și, după cum s-a menționat, să faci lumină asupra teoriei probabilităților nu este cel mai relevant).

Oricât de fundamentală ar fi corespondența dintre Fermat și Pascal, acesta din urmă nu a considerat că problema s-a încheiat. Problema pe care au investigat-o l-a determinat pe Păscal să studieze combinațiile într-un mod sistematic, iar până la sfârșitul aceluiași an și-a prezentat propriile descoperiri într-o carte, *Traité du triangle arithmétique*, care a fost tipărită abia în 1665, la trei ani după moartea sa. Deși erau deja cunoscute la acea vreme, au fost prezentate pentru prima dată într-un mod riguros și puse în relație cu alte rezultate care au avut o mare influență: *Traité* este, prin urmare, primul tratat modern de combinatorii.

„Triunghiul aritmetic” se construiește urmând o simplă regulă. În forma introdusă de Pascal în „Tratatul” său (Figura 3), constă într-o matrice de numere, a priori infinite, în care toate datele din primul rând și din prima coloană sunt 1. Plecând de aici, fiecare dată nouă a matricei trebuie construită pur și simplu prin adăugarea numărului de mai sus celui din stânga sa. Astfel, prin desemnarea cu T_{ij} a datelor din rândul i și coloana j a acestei matrice, regula de construcție stabilește că

$$T_{ij} = T_{i-1,j} + T_{i,j-1},$$

cu clarificarea³ $T_{i,0} = T_{0,j} = 1$. De exemplu, datele de poziție 1,1 și 1,2 pot fi derivate ca:

$$T_{1,1} = T_{0,1} + T_{1,0} = 1 + 1 = 2,$$

$$T_{1,2} = T_{0,2} + T_{1,1} = 1 + 2 = 3,$$

și așa mai departe.

³ Deși Pascal a numerotat rândurile și coloanele începând de la 1, în prezent se face începând de la 0, iar aici vom rămâne la convenția modernă.

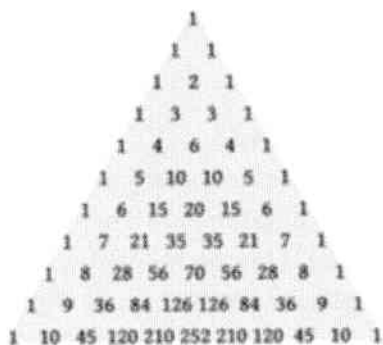
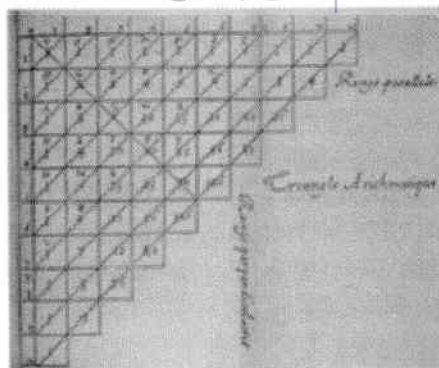


Figura 3. Triunghiul aritmetic, așa cum este realizat în *Traité du triangle arithmétique* a lui Pascal (stânga) și modul în care se reprezintă în prezent (dreapta).

În prezent, triunghiul este reprezentat prin rotirea matricei cu 45° (Figura 3), astfel încât liniile triunghiului modern sunt diagonalele din matricea Pascal, iar regula se traduce prin faptul că fiecare număr al triunghiului este obținut prin adunarea celor două înlocuite. Aceasta nu este singura diferență: în timp ce Pascal număra rânduri și coloane începând de la 1, acum începe să se numere de la 0, astfel încât vârful triunghiului în reprezentarea de astăzi este rândul 0, iar prima poziție în fiecare rând este întotdeauna 0.

Printre rezultatele cunoscute ale triunghiului se numără raportul său cu așa-numitele *numere figurative*, cunoscute încă din Grecia antică (definite și aprofundate mai înainte) și raportul său cu *numerele combinatorii* (unde introduce și problema punctelor, motivul acestei cercetări). Deși ne vom ocupa în detaliu cu numerele combinatorii, anticipez că prin intermediul simbolului $\binom{n}{k}$, cunoscut ca număr combinatoriu «*n* din *k*», denumim un număr întreg care indică în cât de multe moduri puteți alege *k* obiecte dintr-un întreg de *n*, fără ca ordinea de alegere să aibă importanță. Legătura cu triunghiul este următoarea:

$$T_{i,j} = \binom{i+j}{i}.$$

De exemplu, $T_{2,3} = \binom{5}{2} = 10$ (corespunzând termenului 3,4 a triunghiului în reprezentarea lui Pascal, sau poziția 2 din rândul 5 al triunghiului din reprezentarea modernă; amintiți-vă că în prezent începem să numărăm de la 0 și nu de la 1), iar 10 sunt, de exemplu, modurile în care puteți combina 5 gusturi pentru două bile de înghețată.

Binomul lui Newton

Unul dintre cele mai importante rezultate în tratatul lui Pascal este împărțirea diagonalelor triunghiului aritmetic (rândurile din reprezentarea actuală) cu coeficienții dezvoltării binomiale $(a+b)^n$. Dezvoltarea combinației este ușor de realizat în mod recursiv, ca și produsul $(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$, dacă este cunoscută dezvoltarea pentru puterea anterioară. În plus, pentru exponenții de la 1 la 3, aceasta dă naștere unei interpretări geometrice interesante, ilustrată în figura 4.

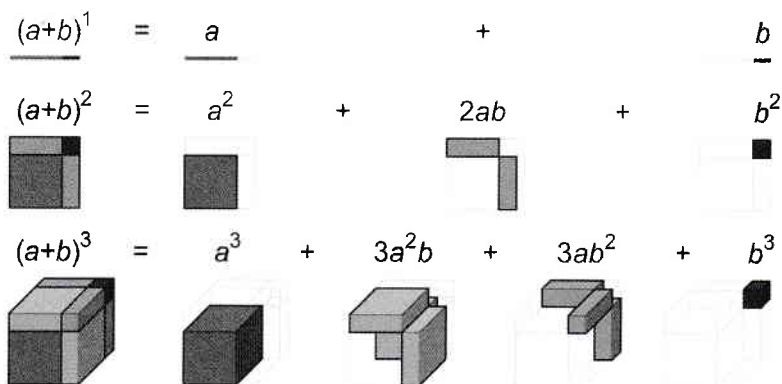


Figura 4. Semnificația geometrică a dezvoltării binomiale a lui Newton pentru puterile 1, 2 și 3. Ilustrație de C.M.G. Lee.

Scriem în mod explicit dezvoltarea binomului pentru exponenții 2 și 3:

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2,$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$$

După cum se poate observa prin compararea cu figura 3, numerele celei de-a treia și a patra linii coincid cu coeficienții acestor evoluții (așa că, le-am scris în mod explicit). Demonstrația lui Pascal a acestui rezultat este foarte elegantă și ușor de înțeles. O vom explica arătând cum să obținem coeficienții dezvoltării lui $(a + b)^4$ folosind formula recursivă anterioară. Pentru a reuși, va trebui doar să înmulțim dezvoltarea $(a + b)^3$ ori $a + b$, sau, în mod echivalent, să o înmulțim mai întâi cu a , apoi cu b și apoi să adunăm rezultatele:

$$\begin{array}{r} a(a+b)^3 = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ + b(a+b)^3 = \quad \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$

Dacă observăm cu atenție, în această operație se obțin exclusiv coeficienții de $(a + b)^4$ (cu excepția primului și ultimului, ambele 1) prin adăugarea perechilor de coeficienți consecutivi ai celui de-al patrulea rând al triunghiului aritmetic ($1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$, $3 + 1 = 4$). Dar acesta e tocmai modul de a construi triunghiul! Pentru a reflecta asupra acestui lucru, este ușor să îți dai seama că aceeași procedură ar permite obținerea coeficienților pentru $(a + b)^5$ pornind de la cei ai lui $(a + b)^4$ și se poate obține al șaselea rând al triunghiului. Și așa mai departe.

Raportul identificat de Păscal între coeficienții triunghiului aritmetic și numerele combinatorii permite scrierea formulei „dezvoltării binomului” în cea mai cunoscută formă:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n,$$



Figura 5. Portretul lui Sir Isaac Newton (1643-1727), operă de Godfrey Kneller.

al cărei merit principal este să stabilească o legătură între combinatorică și algebră (o tehnică care oferă o multitudine de posibilități și pe care cu mult înainte Euler ar fi putut să o exploateze cu pricepere).

Cu calm totuși, va fi clarificat un mic mister aici.

Cercetând prin reminiscentele lecțiilor de matematică din școală, vă veți aminti că dezvoltarea binomului în cauză a fost predată ca formulă a „binomului lui Newton”.

Isaac Newton – născut în 1643 – nu era decât un copil, când Pascal a compus tratatul despre triunghi, așa că a fost dificil să fi putut avea de-a face cu astfel de formule. Și asta nu este tot, dezvoltarea binomului apare deja într-un manuscris al matematicianului persan **Al-Karaji** (cca. 953-1029), iar în cazul $n = 2$ apărerea chiar în *Elementele* lui Euclid (cca. 300 î.Hr.). Deci, de ce se definește „binomul lui Newton”?

Este dificil să exagerezi evaluând figura lui Sir Isaac Newton. Dacă importanța unui om de știință este măsurată pe baza influenței contribuțiilor sale în societate, prin capacitatea sa de a o transforma radical, Newton este pe primul loc. Dacă ar fi fost și el „singur” pentru revoluția fizicii care a dus la publicarea cărții sale *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Principia*, unde se enunță legile mișcării și legea gravitației universale) și pentru inventarea calculului, ar merita deja primul loc. Dar, s-a ocupat de multe alte probleme, printre care și de *teorema binomială*. Să vedem în ce constă această descoperire pentru a merita un titlu atât de prestigios.

Newton, care inventase o metodă de interpolare a datelor prin polinoame, și-a dat seama că dezvoltarea binomului a fost strâns legată de formula sa de interpolare.